

Lösung

Aufgabe 1 (4P):

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Lösung $n = 1$: $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ (2P).

$n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}. \dots\dots\dots (2P) \\ \text{Summe} &\dots\dots\dots (4P) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10P=5P+5P):

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 4}{2^{2n+1} + 2^n},$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}.$

Lösung

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 4}{2^{2n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 4}{2 \cdot 4^n + 2^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \dots\dots\dots (4P)$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 4}{2^{2n+1} + 2^n} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1P)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} \dots\dots\dots (2P)$

Es gilt: $1 \leq \sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1 \dots\dots\dots (2P)$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n} = 7. \dots\dots\dots (1P)$
Summe (10P)

Aufgabe 3 (10P=5P+5P):

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}.$

Lösung

a) Erste Lösung: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 \dots\dots\dots (2P)$

Da $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert, also divergiert $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \dots\dots\dots (3P)$

Zweite Lösung: da $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0 (\Leftrightarrow n(n+1) < 4n^2)$ (3P)

und $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ divergiert, also divergiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n}$ (2P)

b) $a_n := \frac{2^n}{(2n)!}$. Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ also konvergiert $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{(2n)!}.$

(5P)

Summe (10P)

Aufgabe 4 (6P):

Bestimmen Sie alle Stellen an denen die Tangente an die Kurve

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

parallel zur x -Achse ist.

Lösung die Tangente im Punkt $x = x_0$ ist parallel zur x -Achse $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ (3P)

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$
 (1P)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ Also sind die gesuchten Punkte } -2 \text{ und } \frac{2}{3} \text{ (2P)}$$

Summe (6P)

Aufgabe 5 (10P):

Für welche $A \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x^e}{x - e} & \text{für } x \neq e \\ A & \text{für } x = e \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = e$ stetig ist.

Lösung $f(x)$ ist stetig im $x_0 = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow e} f(x) = A$ (4P)

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{x - e} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - ex^{e-1}}{1} = 0$$
 (5P)

Also die Funktion ist stetig genau dann, wenn $A = 0$ (1P)

Summe (10P)

Aufgabe 6 (10P=5P+5P):

Berechnen Sie folgende Integrale

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx,$$

$$\text{b) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

Lösung

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t+1} dt^2 = 2 \int_0^{\sqrt{3}} t(t-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} \text{ (4P)}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3 \text{ (1P)}$$

$$\text{b) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}} dx \stackrel{\frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 t}{\sqrt{2} \cos t} d\sqrt{2} \sin t = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2} \text{ (5P)}$$

Summe (10P)

Aufgabe 7 (10P=5P+5P):

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der Parabel $y = 2x^2$, der x -Achse und den vertikalen Geraden $x = -2$, $x = 3$ eingeschlossen ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Begriffs "Bestimmte Integrale" den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 + (n+2)^4 + \dots + (2n)^4}{n^5}.$$

Lösung

$$\text{a) Der Flächeninhalt ist gleich } \int_{-2}^3 2x^2 dx \text{ (2P)}$$

$$\int_{-2}^3 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{70}{3} \dots\dots\dots (3P)$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n \frac{(n+i)^4}{n^5} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^4 \dots\dots\dots (2P)$$

$$\text{Also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^4 = \int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{31}{5} \dots\dots\dots (3P)$$

Summe (10P)

Aufgabe 8 (10P=5P+4P+1P): Sei Γ der Graph der Funktion $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy - 5x - 5y + 1$.

a) Bestimmen Sie den Gradient $\text{grad} f(x_0, y_0)$ und die Gleichung der Tangentialebene T zu Γ an der Stelle $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x, y)$ und entscheiden Sie ob jeder Punkt ein locales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt ist.

c) Entscheiden Sie of $f(x, y)$ ein globales Maximum oder Minimum enthält.

Lösung a) $\text{grad } f(x, y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \dots\dots\dots (1P)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + y - 5, \frac{\partial f}{\partial y} = x - 6y - 5 \dots\dots\dots (1P)$$

$$\text{also } \text{grad } f(1, 2) = (1, -16) \dots\dots\dots (1P)$$

Die Gleichung für die Tangentialebene hat die Form:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(y - y_0) \dots\dots\dots (1P)$$

im Punkt $(1, 2), f(1, 2) = -22$) hat sie die Form

$$z + 22 = x - 1 - 16(y - 2), \text{ oder } z = x - 16y + 9 \dots\dots\dots (1P)$$

$$\text{b) } (x_0, y_0) \text{ ist stationär} \Leftrightarrow \text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0) \dots\dots\dots (1P)$$

$$\text{grad } f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ x - 6y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases} \dots\dots\dots (1P)$$

$$\text{Hessesche Matrix: } H_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (1P)$$

$$\Delta = -\det H_f = 25 > 0 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt.} \dots\dots\dots (1P)$$

$$\text{c) Nein, da } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = +\infty \lim_{y \rightarrow \infty} f(0, y) = -\infty. \dots\dots\dots (1P)$$

Summe (10P)

Aufgabe 9 (4P):

Zeigen Sie, dass die Funktion $z = (x - 2y)^{10} + (x + 2y)^{10}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Lösung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 90 [(x - 2y)^8 + (x + 2y)^8], \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \cdot 90 [(x - 2y)^8 + (x + 2y)^8],$

daraus folgt die Behauptung (4P)

Summe (4P)

Aufgabe 10 (6P): Bestimmen Sie das globale Minimum und das globale Maximum der Funktion

$$f(x, y) = (x + 3)^2 + (y - 4)^2$$

unter der Neben-Bedingung: $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum (Lagrangesche Gleichung):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) \text{ (wobei } g = x^2 + y^2 - 1)$$

$$\text{(da } \text{grad } g(x, y) \neq (0, 0) \text{ für alle } (x, y) \text{ mit } g(x, y) = 0) \dots\dots\dots (2P)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 2\lambda x \\ 2y - 8 = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\lambda - 1} \\ y = -\frac{4}{\lambda - 1} \end{cases} \Rightarrow \lambda - 1 = \pm 5 \dots\dots\dots (2P)$$

$$\lambda - 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{5}, y = -\frac{4}{5} \Rightarrow f(x, y) = 36,$$

$$\lambda - 1 = -5 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}, y = \frac{4}{5} \Rightarrow f(x, y) = 16,$$

also $\max_{f(x,y)=36} f(x, y) = 36$, (da die Menge (x, y) mit $g(x, y) = 0$ beschränkt ist). (2P)

Summe (6P)

Totale Summe (80P)

Bewertung:

- $\geq 70 \Rightarrow 1$
- $\geq 60 \Rightarrow 2$
- $\geq 50 \Rightarrow 3$
- $\geq 40 \Rightarrow 4$
- $\leq 39 \Rightarrow \text{NB}$